第 6 章 RIEMANN-STIELTJES 积分

本章以 Riemann 积分的定义为基础，而 Riemann 积分又明显地依赖于实轴的序结构. 因此，开始时，我们先讨论区间上实值函数的积分，后几节再推广到区间上的复值和向量值函数的积分. 到第 10 及 11 两章再讨论在不是区间的集上的积分.

积分的定义和存在性

6.1 定义 设$[a, b]$是给定的区间. $[a, b]$的分法 P 指的是有限点集 x_0，x_1，…，x_n，其中

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n = b.$$

把这里每个数减去它的前邻数的差记作

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

现在假设 f 是定义在$[a, b]$上的有界实函数. 对应于$[a, b]$的每个分法 P，令

$$M_i = \sup f(x) \quad (x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i),$$

$$m_i = \inf f(x) \quad (x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i),$$

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

最后置

$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \inf U(P, f), \tag{1}$$

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \sup L(P, f). \tag{2}$$

其中最大下界与最小上界是对$[a, b]$的所有分法而取的. (1)和(2)的左端分别称为 f 在$[a, b]$上的 Riemann 上积分与下积分.

如果上积分与下积分相等，就说 f 在$[a, b]$上 Riemann 可积，记作 $f \in \mathscr{R}$(即是 $\mathscr{R}$ 表示 Riemann 可积函数的集合). 并且用

$$\int_a^b f\,dx \tag{3}$$

或

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{4}$$

表示(1)和(2)的共同值.

这就是 f 在$[a, b]$上的 Riemann 积分. 因为 f 是有界的，所以存在着两个数 m 和 M，使得

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

因此，对于每个 P，

$$m(b-a) \leqslant L(P,f) \leqslant U(P,f) \leqslant M(b-a).$$

从而数 $L(P, f)$和 $U(P, f)$组成一个有界集. 这说明，对于每个有界函数 f，上积分与下积分都有定义. 关于它们是否相等的问题，即是 f 的可积性问题，是更为细致的问题. 我们将不去孤立地研究 Riemann 积分，而马上去考虑更一般的情形.

6.2 定义 设 α 是$[a, b]$上的一个单调递增函数(因 $\alpha(a)$和 $\alpha(b)$有限，从而 α 在$[a, b]$上有界). 对应于$[a, b]$的每个分法 P，记

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$$

显然 $\Delta\alpha_i \geqslant 0$. 对于$[a, b]$上任意的有界实函数 f，令

$$U(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i,$$

$$L(P,f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i,$$

这里 M_i，m_i 与定义 6.1 中的含义相同，并且定义

$$\overline{\int_a^b} f\mathrm{d}\alpha = \inf U(P,f,\alpha), \tag{5}$$

$$\underline{\int_a^b} f\mathrm{d}\alpha = \sup L(P,f,\alpha), \tag{6}$$

其中的 inf 及 sup 都是对所有分法而取的.

如果(5)和(6)的左端相等，我们就用

$$\int_a^b f\mathrm{d}\alpha \tag{7}$$

有时也用

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x) \tag{8}$$

表示它们的共同值.

这就是$[a,\ b]$上 f 关于 α 的 Riemann-Stieltjes 积分(或简称为 Stieltjes 积分).

如果(7)存在，即(5)和(6)相等，我们就说 f 关于 α 在 Riemann 意义上可积，并记作 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$.

取 $\alpha(x)=x$，即见 Riemann 积分是 Riemann-Stieltjes 积分的特殊情形．但是我们要明确指出，在一般情形，α 甚至不一定是连续的.

关于这个概念还要说几句话．与(8)相比我们宁愿采用(7)式，因为在(8)中出现的字母 x 丝毫不增加(7)的内容．我们用哪个字母去代表所谓的“积分变量”是无关紧要的．例如，(8)就与

$$\int_a^b f(y)\,\mathrm{d}\alpha(y)$$

相同．积分依赖于 f，α，a 和 b，但与积分变量无关，也可把它略去.

积分变量所起的作用很像求和的指标：两个记号

$$\sum_{i=1}^{n} c_i,\ \sum_{k=1}^{n} c_k$$

是相同的，因为每一个指的都是 $c_1+c_2+\cdots+c_n$.

当然，添上积分变量也无妨，而且在许多情形这样做实际上是方便的.

现在我们研究积分(7)的存在．有些话现在说一次，以后不再每次说明，假定 f 是有界实函数，而 α 在$[a,\ b]$上单调递增，当不会产生误解时，我们将用 $\int$ 代替 $\int_a^b$.

6.3 定义 我们称分法 P^* 是 P 的加细，如果 $P^*\supset P$(即 P 的每个点都是 P^* 的点)．设有两个分法 P_1 和 P_2，如果 $P^*=P_1\cup P_2$，便称 P^* 是它们的共同加细.

6.4 定理 *如果 P^* 是 P 的加细，那么*

$$L(P,f,\alpha)\leqslant L(P^*,f,\alpha) \tag{9}$$

而且

$$U(P^*,f,\alpha)\leqslant U(P,f,\alpha). \tag{10}$$

证 为了证(9)，先设 P^* 只比 P 多一个点．设这个附加的点是 x^*，并假定 $x_{i-1}<x^*<x_i$，其中 x_{i-1} 和 x_i 是 P 的两个相邻的点．令

$$w_1=\inf f(x)\quad (x_{i-1}\leqslant x\leqslant x^*),$$

$$w_2 = \inf f(x) \quad (x^* \leqslant x \leqslant x_i).$$

显然 $w_1 \geqslant m_i$ 及 $w_2 \geqslant m_i$. 与前面一样，这里的

$$m_i = \inf f(x) \quad (x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i),$$

因此，

$$\begin{aligned}
&L(P^*, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) \\
&= w_1[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + w_2[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] - m_i[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})] \\
&= (w_1 - m_i)[\alpha(x^*) - \alpha(x_{i-1})] + (w_2 - m_i)[\alpha(x_i) - \alpha(x^*)] \geqslant 0
\end{aligned}$$

如果 P^* 比 P 多含 k 个点，我们把上述论证重复 k 次，就得到(9)式. (10)式的论证是类似的.

6.5 定理 $\underline{\int_a^b} f \mathrm{d}\alpha \leqslant \overline{\int_a^b} f \mathrm{d}\alpha.$

证 设 P^* 是两个分法 P_1 和 P_2 的共同加细. 由定理 6.4，

$$L(P_1, f, \alpha) \leqslant L(P^*, f, \alpha) \leqslant U(P^*, f, \alpha) \leqslant U(P_2, f, \alpha)$$

因此

$$L(P_1, f, \alpha) \leqslant U(P_2, f, \alpha) \tag{11}$$

让 P_2 保持不变，而对所有的 P_1 取 sup，(11)式就给出

$$\underline{\int} f \mathrm{d}\alpha \leqslant U(P_2, f, \alpha) \tag{12}$$

在(12)中，对所有的 P_2 取 inf，就得到本定理.

6.6 定理 *在$[a, b]$上 $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ 当且仅当对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在一个分法 P 使得*

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \varepsilon \tag{13}$$

证 对于任意的 P，有

$$L(P, f, \alpha) \leqslant \underline{\int} f \mathrm{d}\alpha \leqslant \overline{\int} f \mathrm{d}\alpha \leqslant U(P, f, \alpha).$$

所以(13)式意味着

$$0 \leqslant \overline{\int} f \mathrm{d}\alpha - \underline{\int} f \mathrm{d}\alpha < \varepsilon$$

因此，如果(13)式对于每个 $\varepsilon > 0$ 都能成立，就必然有

$$\overline{\int} f\mathrm{d}\alpha = \underline{\int} f\mathrm{d}\alpha$$

这就是 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$.

反之，假设 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$并给定 $\varepsilon>0$，于是存在分法 P_1 和 P_2，使得

$$U(P_2,f,\alpha)-\int f\mathrm{d}\alpha<\frac{\varepsilon}{2},\tag{14}$$

$$\int f\mathrm{d}\alpha-L(P_1,f,\alpha)<\frac{\varepsilon}{2},\tag{15}$$

把 P 选为 P_1 和 P_2 的共同加细，那么定理 6.4，连同(14)式和(15)式说明

$$\begin{aligned}U(P,f,\alpha)\leqslant U(P_2,f,\alpha)&<\int f\mathrm{d}\alpha+\frac{\varepsilon}{2}<L(P_1,f,\alpha)+\varepsilon\\&\leqslant L(P,f,\alpha)+\varepsilon.\end{aligned}$$

于是，对于这个分法 P，(13)成立.

定理 6.6 给可积性提供了一个方便的判别法. 在运用它之前，先说一点有密切关系的事项.

6.7 定理

(a)如果(13)式对某个 P 及某个 ε 成立，那么(当还用这同一个 ε 时)(13)式对 P 加细后仍成立.

(b)如果对于 $P=\{x_0,\ \cdots,\ x_n\}$，(13)式成立，而 s_i，t_i 是$[x_{i-1},\ x_i]$内的任意点，那么

$$\sum_{i=1}^{n}|f(s_i)-f(t_i)|\Delta\alpha_i<\varepsilon.$$

(c)如果 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$并且(b)的题设还成立，那么

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(t_i)\Delta\alpha_i-\int_a^b f\mathrm{d}\alpha\right|<\varepsilon.$$

证 由定理 6.4 得出(a)，在(b)中所做的题设之下，$f(s_i)$及 $f(t_i)$都位于$[m_i,\ M_i]$内，所以 $|f(s_i)-f(t_i)|\leqslant M_i-m_i$ 因此

$$\sum_{i=1}^{n}|f(s_i)-f(t_i)|\Delta\alpha_i\leqslant U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha),$$

这就证出了(b). 从几个明显的不等式

$$L(P,f,\alpha)\leqslant\sum f(t_i)\Delta\alpha_i\leqslant U(P,f,\alpha)$$

及

$$L(P,f,\alpha)\leqslant\int f\mathrm{d}\alpha\leqslant U(P,f,\alpha)$$

证明了(c).

6.8　定理　如果 f 在 $[a,b]$ 上连续，那么在 $[a,b]$ 上，$f\in\mathscr{R}(\alpha)$.

证　给定了 $\varepsilon>0$，选 $\eta>0$ 使得

$$[\alpha(b)-\alpha(a)]\eta<\varepsilon.$$

因为 f 在 $[a,b]$ 上一致连续(定理 4.19)．所以存在着 $\delta>0$，当 $x\in[a,b]$，$t\in[a,b]$ 并且 $|x-t|<\delta$ 时

$$|f(x)-f(t)|<\eta \tag{16}$$

假若 P 是 $[a,b]$ 的任何合于 $\Delta x_i<\delta(i=1,2,\cdots,n)$ 的分法，那么由(16)便有

$$M_i-m_i\leqslant\eta\quad(i=1,\cdots,n) \tag{17}$$

因此

$$\begin{aligned}U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)&=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta\alpha_i\\&\leqslant\eta\sum_{i=1}^{n}\Delta\alpha_i=\eta[\alpha(b)-\alpha(a)]<\varepsilon.\end{aligned}$$

根据定理 6.6 知道 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$.

6.9　定理　如果 f 在 $[a,b]$ 上单调，α 在 $[a,b]$ 上连续，那么 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$.(当然，仍然假定 α 单调).

证　假设给定了 $\varepsilon>0$. 对于任意正整数 n，选分法 P，使得

$$\Delta\alpha_i=\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n},\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

因为 α 连续，所以这是能作到的(定理 4.23).

我们假定 f 单调递增(递减的情形与此相仿)，那么

$$M_i=f(x_i),m_i=f(x_{i-1}),\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

因此只要把 n 取得充分大，便有

$$\begin{aligned}U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)&=\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\\&=\frac{\alpha(b)-\alpha(a)}{n}\cdot[f(b)-f(a)]<\varepsilon.\end{aligned}$$

由定理 6.6 知道 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$.

6.10 定理 假设 f 在 $[a, b]$ 上有界，只有有限个间断点. α 在 f 的每个间断点上连续，那么 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$.

证 假设给定了 $\varepsilon>0$. 令 $M=\sup|f(x)|$. 设 E 是使 f 间断的点的集. 由于 E 有限，而 α 在 E 的每点连续，我们可以取有限个不相交的闭区间 $[u_j, v_j]\subset[a, b]$ 把 E 盖住，同时要对应的各差数 $\alpha(v_j)-\alpha(u_j)$ 的和小于 ε. 进而我们能够把这些区间安置得让 $E\cap(a, b)$ 的每个点在某个 $[u_j, v_j]$ 内部.

从 $[a, b]$ 去掉开区间 (u_j, v_j). 剩下的集 K 是紧的. 因而 f 在 K 上一致连续. 于是有一个 $\delta>0$，保证 $s\in K$，$t\in K$，$|s-t|<\delta$ 时 $|f(s)-f(t)|<\varepsilon$.

现在照下边说的方法给 $[a, b]$ 作分法 $P=\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$：每个 u_j 在 P 里出现，每个 v_j 在 P 里出现，任何开区间 (u_j, v_j) 没有点在 P 里出现. 如果 x_{i-1} 不是 u_j 之一，那么 $\Delta x_i<\delta$.

注意，对于每个 i，$M_i-m_i<2M$，并且 $M_i-m_i\leqslant\varepsilon$，除非 x_{i-1} 是 u_j 之一. 于是照着定理 6.8 的证明那样

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)\leqslant[\alpha(b)-\alpha(a)]\varepsilon+2M\varepsilon$$

因为 ε 是任意的，定理 6.6 说明 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$.

附注：如果 f 与 α 有一个共同的间断点，f 便未必属于 $\mathscr{R}(\alpha)$. 习题 3 说明了这一点.

6.11 定理 假设在 $[a, b]$ 上 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$，$m\leqslant f\leqslant M$. ϕ 在 $[m, M]$ 上连续，并且在 $[a, b]$ 上 $h(x)=\phi(f(x))$. 那么在 $[a, b]$ 上 $h\in\mathscr{R}(\alpha)$.

证 选定 $\varepsilon>0$. 因为 ϕ 在 $[m, M]$ 上一致连续，所以有 $\delta>0$ 合于 $\delta<\varepsilon$，并且当 $s, t\in[m, M]$ 时，只要 $|s-t|\leqslant\delta$ 便能使 $|\phi(s)-\phi(t)|<\varepsilon$.

因为 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$，所以有 $[a, b]$ 的分法 $P=\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 使得

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<\delta^2. \tag{18}$$

设 M_i，m_i 的意义和定义 6.1 所说的相同，而 M_i^*，m_i^* 是关于 h 的类似的数. 把 $1, 2, \cdots, n$ 这些数分作两类：如果 $M_i-m_i<\delta$，便使 $i\in A$，如果 $M_i-m_i\geqslant\delta$，便使 $i\in B$.

当 $i\in A$ 时，δ 的选取法表明 $M_i^*-m_i^*\leqslant\varepsilon$.

当 $i\in B$ 时，$M_i^*-m_i^*\leqslant 2K$. 这里 $K=\sup|\phi(t)|$，$m\leqslant t\leqslant M$. 根据 (18)，得到

$$\delta\sum_{i\in B}\Delta\alpha_i\leqslant\sum_{i\in B}(M_i-m_i)\Delta\alpha_i<\delta^2 \tag{19}$$

所以 $\sum_{i\in B}\Delta\alpha_i<\delta$，因而

$$U(P,h,\alpha)-L(P,h,\alpha)$$

$$= \sum_{i \in A} (M_i^* - m_i^*) \Delta\alpha_i + \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*) \Delta\alpha_i$$

$$\leqslant \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a)] + 2K\delta < \varepsilon[\alpha(b) - \alpha(a) + 2K]$$

因为 ε 是任意的，由定理 6.6 有 $h \in \mathscr{R}(\alpha)$.

评注：这定理提出一个问题，即是：什么样的函数恰好 Riemann 可积？答案在定理 11.33(b).

积分的性质

6.12 定理

(a)如果在 $[a, b]$ 上 $f_1 \in \mathscr{R}(\alpha)$ 且 $f_2 \in \mathscr{R}(\alpha)$，那么

$$f_1 + f_2 \in \mathscr{R}(\alpha),$$

对任意的常数 c，$cf \in \mathscr{R}(\alpha)$，并且

$$\int_a^b (f_1 + f_2) \mathrm{d}\alpha = \int_a^b f_1 \mathrm{d}\alpha + \int_a^b f_2 \mathrm{d}\alpha,$$

$$\int_a^b cf \mathrm{d}\alpha = c\int_a^b f \mathrm{d}\alpha.$$

(b)如果在 $[a, b]$ 上 $f_1(x) \leqslant f_2(x)$，那么

$$\int_a^b f_1 \mathrm{d}\alpha \leqslant \int_a^b f_2 \mathrm{d}\alpha.$$

(c)如果在 $[a, b]$ 上 $f \in \mathscr{R}(\alpha)$，并且 $a < c < b$，那么在 $[a, c]$ 及 $[c, b]$ 上 $f \in \mathscr{R}(\alpha)$，121并且

$$\int_a^c f \mathrm{d}\alpha + \int_c^b f \mathrm{d}\alpha = \int_a^b f \mathrm{d}\alpha.$$

(d)如果在 $[a, b]$ 上 $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ 并且在 $[a, b]$ 上 $|f(x)| \leqslant M$，那么

$$\left|\int_a^b f \mathrm{d}\alpha\right| \leqslant M[\alpha(b) - \alpha(a)].$$

(e)如果 $f \in \mathscr{R}(\alpha_1)$ 并且 $f \in \mathscr{R}(\alpha_2)$，那么 $f \in \mathscr{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$ 并且

$$\int_a^b f \mathrm{d}(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f \mathrm{d}\alpha_1 + \int_a^b f \mathrm{d}\alpha_2;$$

如果 $f \in \mathscr{R}(\alpha)$ 而 c 是个正常数，那么 $f \in \mathscr{R}(c\alpha)$ 而且

$$\int_a^b f \mathrm{d}(c\alpha) = c\int_a^b f \mathrm{d}\alpha.$$

证 如果 $f=f_1+f_2$ 而 P 是$[a, b]$的任意分法，就能得到

$$L(P,f_1,\alpha)+L(P,f_2,\alpha)\leqslant L(P,f,\alpha)\leqslant U(P,f,\alpha)\leqslant U(P,f_1,\alpha)+U(P,f_2,\alpha). \tag{20}$$

如果 $f_1\in\mathscr{R}(\alpha)$，$f_2\in\mathscr{R}(\alpha)$，并设 $\varepsilon>0$ 已经给定. 便存在分法 $P_j(j=1, 2)$使得

$$U(P_j,f_j,\alpha)-L(P_j,f_j,\alpha)<\varepsilon.$$

如果把 P_1 和 P_2 换成它们的共同加细 P，这些不等式仍然成立. 于是(20)说明

$$U(P,f,\alpha)-L(P,f,\alpha)<2\varepsilon.$$

这就证明了 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$.

用这同一个 P 可以得到

$$U(P,f_j,\alpha)<\int f_j\mathrm{d}\alpha+\varepsilon\quad(j=1,2),$$

因此，(20)说明

$$\int f\mathrm{d}\alpha\leqslant U(P,f,\alpha)<\int f_1\mathrm{d}\alpha+\int f_2\mathrm{d}\alpha+2\varepsilon.$$

因为 ε 是任意的，所以能断定

$$\int f\mathrm{d}\alpha\leqslant\int f_1\mathrm{d}\alpha+\int f_2\mathrm{d}\alpha. \tag{21}$$

如果在(21)式中用 $-f_1$ 和 $-f_2$ 取代 f_1 和 f_2，不等式便掉转方向，从而证明了等式成立.

定理 6.12 的其他断语的证明都十分类似，不需作详细叙述. 在(c)条中的要点在于，当逼近 $\int f\mathrm{d}\alpha$ 时，(经过加细)我们可以限于考虑包含点 c 的分法.

6.13 定理 如果在$[a, b]$上 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$，$g\in\mathscr{R}(\alpha)$，那么

(a) $fg\in\mathscr{R}(\alpha)$；

(b) $|f|\in\mathscr{R}(\alpha)$而且 $\left|\int_a^b f\mathrm{d}\alpha\right|\leqslant\int_a^b|f|\mathrm{d}\alpha$.

证 如果取 $\phi(t)=t^2$，定理 6.11 说明，当 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$时，$f^2\in\mathscr{R}(\alpha)$. 利用恒等式

$$4fg=(f+g)^2-(f-g)^2$$

就能完成(a)的证明

如果取 $\phi(t)=|t|$，定理 6.11 同样说明 $|f|\in\mathscr{R}(\alpha)$，选择 $c=\pm1$，使得

$$c\int f\mathrm{d}\alpha\geqslant 0.$$

于是由于 $cf\leqslant|f|$，所以

$$\left|\int f\mathrm{d}\alpha\right| = c\int f\mathrm{d}\alpha = \int cf\mathrm{d}\alpha \leqslant \int |f| \mathrm{d}\alpha.$$

6.14 定义 单位阶跃函数 I 的定义是

$$I(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

6.15 定理 如果 $a<s<b$，f 在$[a, b]$上有界，f 在 s 点连续，而 $\alpha(x)=I(x-s)$，那么

$$\int_a^b f\mathrm{d}\alpha = f(s).$$

证 取分法 $P=\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$，其中 $x_0=a$，而 $x_1=s<x_2<x_3=b$. 于是

$$U(P,f,\alpha) = M_2, L(P,f,\alpha) = m_2.$$

因为 f 在 s 点连续，我们知道，当 $x_2\to s$ 时，M_2 与 m_2 都趋于 $f(s)$.

6.16 定理 假定对于 $n=1, 2, 3, \cdots$，$c_n\geqslant 0$，$\sum c_n$ 收敛. $\{s_n\}$是(a, b)之内的一串不同的点，并且

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x-s_n). \tag{22}$$

设 f 在$[a, b]$上连续，那么

$$\int_a^b f\mathrm{d}\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(s_n). \tag{23}$$

证 用比较验敛法可以证明级数(22)对于每个 x 收敛. 它的和 $\alpha(x)$显然是单调的，$\alpha(a)=0$，$\alpha(b)=\sum c_n$(这是在评注 4.31 里出现的那种函数.)

假设已经给定了 $\varepsilon>0$，再选一个能实现

$$\sum_{N+1}^{\infty} c_n < \varepsilon$$

的 N. 令

$$\alpha_1(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n I(x-s_n), \alpha_2(x) = \sum_{N+1}^{\infty} c_n I(x-s_n).$$

根据定理 6.12 和 6.15，

$$\int_a^b f\mathrm{d}\alpha_1 = \sum_{i=1}^{N} c_n f(s_n). \tag{24}$$

由于 $\alpha_2(b)-\alpha_2(a)<\varepsilon$，

$$\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha_2\right| \leqslant M\varepsilon, \tag{25}$$

其中 $M=\sup|f(x)|$. 既然 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ 那么从(24)和(25)可以推得

$$\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha - \sum_{i=1}^{N} c_n f(s_n)\right| \leqslant M\varepsilon \tag{26}$$

让 $N\to\infty$，就得到(23).

6.17 定理 假定 α 单调递增. 在$[a,b]$上 $\alpha'\in\mathscr{R}$. 设 f 是$[a.\ b]$上的有界实函数，于是 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$当且仅当 $f\alpha'\in\mathscr{R}$. 这时候，

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{27}$$

证 假设给定了 $\varepsilon>0$，并将定理 6.6 用于 α'：有$[a,b]$的一个分法 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$，使得

$$U(P,\alpha')-L(P,\alpha')<\varepsilon \tag{28}$$

由中值定理知道有 $t_i\in[x_{i-1},x_i]$，使得

$$\Delta\alpha_i = \alpha'(t_i)\Delta x_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

如果 $s_i\in[x_{i-1},x_i]$，那么据(28)及定理 6.7(b)便有

$$\sum_{i=1}^{n}|\alpha'(s_i)-\alpha'(t_i)|\Delta x_i<\varepsilon. \tag{29}$$

命 $M=\sup|f(x)|$. 因为

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(t_i)\Delta x_i,$$

从(29)式即得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\alpha'(s_i)\Delta x_i\right| \leqslant M\varepsilon. \tag{30}$$

特别地，对于 $s_i\in[x_{i-1},x_i]$的一切选取法，

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\Delta\alpha_i \leqslant U(P,f\alpha')+M\varepsilon.$$

所以

$$U(P,f,\alpha)\leqslant U(P,f\alpha')+M\varepsilon.$$

同样的论证可以从(30)推得

$$U(P,f\alpha')\leqslant U(P,f,\alpha)+M\varepsilon$$

于是

$$|U(P,f,\alpha)-U(P,f\alpha')|\leqslant M\varepsilon. \tag{31}$$

注意，如果把 P 换作它的任何加细，(28)依然真确．从而(31)依然真确．我们断定

$$\left|\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\alpha-\overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant M\varepsilon.$$

但 ε 是任意的，所以对于任何有界的 f

$$\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\alpha=\overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{32}$$

按照完全一样的方法可以从(30)推得下积分的相等．本定理随之成立．

6.18 评注 前面两条定理显示了 Stieltjes 积分方法所固有的普遍性和适应性．假若 α 是纯阶跃函数[这经常是指(22)式那样形状的函数]积分就变成有限或无限的级数．假若 α 有可积的导数，积分就变作普通的 Riemann 积分．这就能够在许多情形之下同时研究级数和积分而不必分别讨论了．

为了说明这一点，试看一个物理问题．有一段单位长的直导线，有一轴垂直于此导线于一端点，导线关于这轴的惯性矩是

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}m, \tag{33}$$

这里 $m(x)$ 是区间[0，x]之内所含的质量．如果认为导线的密度 ρ 是连续的，即是说如果 $m'(x)=\rho(x)$，那么(33)变为

$$\int_0^1 x^2\rho(x)\,\mathrm{d}x \tag{34}$$

另一方面，如果导线由集中于若干点 x_i 的质量 m_i 组成；(33)就变为

$$\sum_i x_i^2 m_i \tag{35}$$

所以(34)式与(35)式是(33)式的特殊情形，然而(33)式包括的还要多；例如 m 连续而不是处处可微的情形．

6.19 定理(换元) 假设 φ 是严格递增的连续函数，它把闭区间[A，B]映满[a，b]．假设 α 在[a，b]上单调递增，而且在[a，b]上 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$．在[A，B]上定义 β 与 g 为

$$\beta(y)=\alpha(\varphi(y)),g(y)=f(\varphi(y)). \tag{36}$$

那么 $g\in\mathscr{R}(\beta)$ 而且

$$\int_A^B g\,d\beta = \int_a^b f\,d\alpha. \tag{37}$$

证 对应于$[a, b]$的每个分法 $P=\{x_0, \cdots, x_n\}$，有$[A, B]$的一个分法 $Q=\{y_0, \cdots, y_n\}$，其中 $x_i=\varphi(y_i)$. $[A, B]$的所有分法都是按照这个方法求得的. 因为 f 在$[x_{i-1}, x_i]$上所取的值，都与 g 在$[y_{i-1}, y_i]$上所取的值恰好一样，故而知道

$$U(Q,g,\beta) = U(P,f,\alpha),L(Q,g,\beta) = L(P,f,\alpha). \tag{38}$$

因为 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$，可以把 P 选得使 $U(P, f, \alpha)$和 $L(P, f, \alpha)$都靠近于 $\int f d\alpha$. 那么(38)与定理 6.6 合在一起就说明 $g\in\mathscr{R}(\beta)$，因而(37)成立. 证明完毕.

让我们注意下边的特殊情形：

取 $\alpha(x)=x$，那么 $\beta=\varphi$. 假设在$[A, B]$上 $\varphi'\in\mathscr{R}$. 如果将定理 6.17 用于(37)的左端，就得到

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_A^B f(\varphi(y))\varphi'(y)\,dy. \tag{39}$$

积分与微分

在本节，我们仍限于考虑实函数. 我们将要证明，在某种意义上说，积分和微分是互逆的运算.

6.20 定理 设在$[a, b]$上 $f\in\mathscr{R}$. 对于 $a\leqslant x\leqslant b$，令

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

那么 F 在$[a, b]$上连续；如果 f 又在$[a, b]$的 x_0 点连续，那么 F 便在 x_0 可微，并且

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

证 因 $f\in\mathscr{R}$，所以 f 有界. 假设对于 $a\leqslant t\leqslant b$，$|f(t)|\leqslant M$. 如果 $a\leqslant x<y\leqslant b$，那么由定理 6.12 的(c)和(d)知道

$$|F(y)-F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leqslant M(y-x),$$

给定了 $\varepsilon>0$，只要 $|y-x|<\varepsilon/M$，就会有

$$|F(y)-F(x)|<\varepsilon$$

这就证明了 F 的连续性(而且实际上是一致连续性).

现在假设 f 在 x_0 点连续. 给定了 $\varepsilon>0$，选一个 $\delta>0$ 使得在 $|t-x_0|<\delta$ 并 $a\leqslant t\leqslant b$ 时，

$$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

因此，如果

$$x_0-\delta<s\leqslant x_0\leqslant t<x_0+\delta \text{ 而且 } a\leqslant s<t\leqslant b,$$

根据定理 6.12(d)，便有

$$\left|\frac{F(t)-F(s)}{t-s}-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{t-s}\int_s^t[f(u)-f(x_0)]\mathrm{d}u\right|<\varepsilon.$$

这就直接推得 $F'(x_0)=f(x_0)$ 了.

6.21 微积分基本定理 如果在 $[a,b]$ 上 $f\in\mathscr{R}$. 在 $[a,b]$ 上又有可微函数 F 合于 $F'=f$，那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).$$

证 假设给定了 $\varepsilon>0$，选 $[a,b]$ 的分法 $P=\{x_0,\cdots,x_n\}$ 使得 $U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon$. 由中值定理知存在一些点 $t_i\in[x_{i-1},x_i]$，它们对于 $i=1,\cdots,n$ 使得

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=f(t_i)\Delta x_i.$$

由此

$$\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i=F(b)-F(a)$$

现在，从定理 6.7(c)推得

$$\left|F(b)-F(a)-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

因为它对于任何 $\varepsilon>0$ 成立，证明就完成了.

6.22 定理(分部积分) 假定 F 和 G 都是 $[a,b]$ 上的可微函数. $F'=f\in\mathscr{R}$，$G'=g\in\mathscr{R}$. 那么

$$\int_a^b F(x)g(x)\mathrm{d}x=F(b)G(b)-F(a)G(a)-\int_a^b f(x)G(x)\mathrm{d}x.$$

证 令 $H(x)=F(x)G(x)$，然后将定理 6.21 用于 H 和它的导数. 注意，根据定理 6.13，$H'\in\mathscr{R}$.

向量值函数的积分

6.23 定义 设 $f_1,\cdots,f_k$ 是 $[a,b]$ 上的实函数，并设 $\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_k)$ 是将 $[a,b]$ 映入 R^k 内的映射. 如果 α 在 $[a,b]$ 上单调递增，那么说 $\boldsymbol{f}\in\mathscr{R}(\alpha)$，指的就是对于 $j=1,2,\cdots,k$，$f_j\in\mathscr{R}(\alpha)$. 果真如此的话，就定义

$$\int_a^b \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\alpha = \left(\int_a^b f_1\,\mathrm{d}\alpha,\cdots,\int_a^b f_k\,\mathrm{d}\alpha\right).$$

换句话说，$\int \boldsymbol{f}\mathrm{d}\alpha$ 是 R^k 中的点，而$\int f_j\mathrm{d}\alpha$ 是它的第 j 个坐标.

显然，定理 6.12 的(a)，(c)，(e)三条，对于这些向量值的积分是成立的；这只要把前面的结果用于每个坐标就成了. 关于定理 6.17，6.20 及 6.21，同样也对. 作为例证，我们把定理 6.21 的类似定理叙述一下.

6.24 定理 设 $\boldsymbol{f}$ 及 $\boldsymbol{F}$ 是把$[a,b]$映入 R^k 的映射，$\boldsymbol{f}$ 在$[a,b]$上$\in\mathscr{R}$ 并且 $\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{f}$，那么

$$\int_a^b \boldsymbol{f}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{F}(b)-\boldsymbol{F}(a)$$

但是，与 6.13(b)类似的定理，有些新的特点，至少在它的证明上是如此.

6.25 定理 如果 $\boldsymbol{f}$ 是把$[a,b]$映入 R^k 内的映射，并且对于$[a,b]$上的某个单调递增函数 α，$\boldsymbol{f}\in\mathscr{R}(\alpha)$，那么 $|\boldsymbol{f}|\in\mathscr{R}(\alpha)$，而且

$$\left|\int_a^b \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}\alpha\right| \leqslant \int_a^b |\boldsymbol{f}|\,\mathrm{d}\alpha \tag{40}$$

证 如果 f_1，…，f_k 是 $\boldsymbol{f}$ 的分量，那么

$$|\boldsymbol{f}| = (f_1^2+\cdots+f_k^2)^{1/2}. \tag{41}$$

根据定理 6.11，每个函数 f_j^2 属于 $\mathscr{R}(\alpha)$；因此它们的和也属于 $\mathscr{R}(\alpha)$. 因为 x^2 是 x 的连续函数，定理 4.17 说明，对于任意实数 M，平方根函数在$[0,M]$上连续. 如果再一次应用定理 6.11，那么(41)式表明 $|\boldsymbol{f}|\in\mathscr{R}(\alpha)$.

为了证明(40)式，置 $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_k)$，其中 $y_i=\int f_i\mathrm{d}\alpha$. 于是 $\boldsymbol{y}=\int \boldsymbol{f}\mathrm{d}\alpha$，并且

$$|\boldsymbol{y}|^2 = \sum y_j^2 = \sum y_j\int f_j\,\mathrm{d}\alpha$$
$$=\int\left(\sum y_j f_j\right)\mathrm{d}\alpha.$$

根据 Schwarz 不等式

$$\sum y_j f_j(t) \leqslant |\boldsymbol{y}|\,|\boldsymbol{f}(t)| \quad (a\leqslant t\leqslant b) \tag{42}$$

因此，由定理 6.12(b)就有

$$|\boldsymbol{y}|^2 \leqslant |\boldsymbol{y}|\int |\boldsymbol{f}|\,\mathrm{d}\alpha.$$

如果 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$，(40)就是显然的. 如果 $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$，用 $|\boldsymbol{y}|$ 除(43)式就得到(40).

可求长曲线

我们用一个几何趣味的论题来结束这一章，这也给前面一些理论提供一项应用. $k=2$ 的情形(即是平面曲线的情形)在研究复变数的解析函数时相当重要.

6.26 定义 将闭区间$[a, b]$映入 R^k 的映射 γ 叫做 R^k 里的曲线. 为了重视参数区间$[a, b]$，也可以说 γ 是$[a, b]$上的曲线.

假如 γ 是一对一的，γ 就称作弧.

假如 $\gamma(a)=\gamma(b)$；就说 γ 是闭曲线.

应当注意这里定义的曲线是映射而不是点集. 结合着 R^k 里的每个曲线 γ，总有 R^k 的一个子集，即是 γ 的值域，但是不同的曲线可以有相同的值域.

我们给$[a, b]$的每个分法 $P=\{x_0, \cdots, x_n\}$和$[a, b]$上的每个曲线 γ，配置一个数

$$\Lambda(P,\gamma)=\sum_{i=1}^{n}|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})|.$$

这个和里的第 i 项就是 R^k 里 $\gamma(x_{i-1})$与 $\gamma(x_i)$两点间的距离. 所以 $\Lambda(P, \gamma)$就是按照顺序以 $\gamma(x_0)$，$\gamma(x_1)$，…，$\gamma(x_n)$为顶点的折线的长. 当分法越来越密时，这折线就越来越接近于 γ 的值域. 这样看来，我们把

$$\Lambda(\gamma)=\sup\Lambda(P,\gamma)$$

定义作 γ 之长是合理的；这里的 sup 是对$[a, b]$的一切分法来取的.

假若 $\Lambda(\gamma)<\infty$，就说 γ 是可求长的.

有许多情形，$\Lambda(\gamma)$能用 Riemann 积分表示. 我们将要对于连续可微的曲线 γ，即是导数 γ'连续的曲线证明这一点.

6.27 定理 假如 γ'在$[a, b]$上连续，γ 便是可求长的，而且

$$\Lambda(\gamma)=\int_a^b|\gamma'(t)|\,dt.$$

证 如果 $a\leqslant x_{i-1}<x_i\leqslant b$，那么

$$|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})|=\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\gamma'(t)dt\right|\leqslant\int_{x_{i-1}}^{x_i}|\gamma'(t)|\,dt.$$

所以对于$[a, b]$的每个分法 P，

$$\Lambda(P,\gamma)\leqslant\int_a^b|\gamma'(t)|\,dt,$$

从而

$$\Lambda(\gamma)\leqslant\int_a^b|\gamma'(t)|\,dt.$$

今证明反向的不等式，假设给定了 $\varepsilon>0$. 既然 γ'在$[a,b]$上一致连续，便有 $\delta>0$，使得

$$|\gamma'(s)-\gamma'(t)|<\varepsilon$$

在 $|s-t|<\delta$ 时成立. 设 $P=\{x_0,\cdots,x_n\}$是$[a,b]$的分法，对于一切 i，$\Delta x_i<\delta$. 如果 $x_{i-1}\leqslant t\leqslant x_i$，必然

$$|\gamma'(t)|\leqslant|\gamma'(x_i)|+\varepsilon.$$

所以

$$\begin{aligned}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t&\leqslant|\gamma'(x_i)|\Delta x_i+\varepsilon\Delta x_i\\&=\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}[\gamma'(t)+\gamma'(x_i)-\gamma'(t)]\mathrm{d}t\right|+\varepsilon\Delta x_i\\&\leqslant\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\gamma'(t)\mathrm{d}t\right|+\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}[\gamma'(x_i)-\gamma'(t)]\mathrm{d}t\right|+\varepsilon\Delta x_i\\&\leqslant|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})|+2\varepsilon\Delta x_i.\end{aligned}$$

把这些不等式相加，就得到

$$\begin{aligned}\int_a^b|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t&\leqslant\Lambda(P,\gamma)+2\varepsilon(b-a)\\&\leqslant\Lambda(\gamma)+2\varepsilon(b-a).\end{aligned}$$

由于 ε 是任意的

$$\int_a^b|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\Lambda(\gamma).$$

证明就完成了.

习题

1. 假设 α 在$[a,b]$上递增，$a\leqslant x_0\leqslant b$，$\alpha$ 在 x_0 连续，$f(x_0)=1$，并且当 $x\neq x_0$时 $f(x)=0$. 试证 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$并且 $\int f\mathrm{d}\alpha=0$.

2. 假设在$[a,b]$上 $f\geqslant0$，f 连续，并且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$. 试证，对于所有的 $x\in[a,b]$，$f(x)=0$(与习题 1 比较).

3. 三个函数 β_1，β_2，β_3 定义如下：对于 $j=1,2,3$，当 $x<0$ 时 $\beta_j(x)=0$，当 $x>0$ 时 $\beta_j(x)=1$；并且 $\beta_1(0)=0$，$\beta_2(0)=1$，$\beta_3(0)=\frac{1}{2}$. 设 f 是$[-1,1]$上的有界函数.

(a)证明 $f\in\mathscr{R}(\beta_1)$当且仅当 $f(0+)=f(0)$，在这个情形还有

$$\int f\mathrm{d}\beta_1 = f(0).$$

(b)对 β_2 陈述并说明类似的结果.

(c)证明 $f\in\mathscr{R}(\beta_3)$ 当且仅当 f 在 0 点连续.

(d)如果 f 在 0 点连续，证明

$$\int f\mathrm{d}\beta_1 = \int f\mathrm{d}\beta_2 = \int f\mathrm{d}\beta_3 = f(0)$$

4. 如果对于一切无理点 x，$f(x)=0$，对于一切有理点 x，$f(x)=1$. 证明对于任意的 $a<b$，在$[a, b]$上 $f\notin\mathscr{R}$

5. 假如 f 是$[a, b]$上的有界实函数，在$[a, b]$上 $f^2\in\mathscr{R}$. 是否必然 $f\in\mathscr{R}$? 如果假定 $f^3\in\mathscr{R}$，答案是否改变?

6. 设 P 是 2.44 所作的 Cantor 集. 设 f 是$[0, 1]$上的有界实函数，它在 P 以外的每点连续，试证在$[0, 1]$上 $f\in\mathscr{R}$. 提示：P 能被有限个开区间盖住，这些区间的总长可以任意小. 照定理 6.10 那样处理.

7. 假定 f 是$(0, 1]$上的实函数，对于每个 $c>0$，在$[c, 1]$上 $f\in\mathscr{R}$. 定义

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{c\to 0}\int_c^1 f(x)\mathrm{d}x$$

只须这极限存在(而且是有限的).

(a)若是在$[0, 1]$上 $f\in\mathscr{R}$，证明这定义和旧定义相同.

(b)作一个函数 f，使上述的极限存在，然而用 $|f|$ 换了 f 这极限便不存在.

8. 假若 a 是固定的，b 是大于 a 的任意数，在$[a, b]$上 $f\in\mathscr{R}$. 定义

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

只要这极限存在(而且是有限的). 这时便说左端的积分收敛. 如果把 f 换作 $|f|$ 它仍然收敛，就说它绝对收敛.

假定 $f(x)\geqslant 0$，并且在$[1, \infty]$上单调递减. 试证

$$\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

收敛，当且仅当

$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$

收敛(这是关于级数收敛性的"积分"检验法).

9. 证明分部积分有时能用于习题 7.8 所定义的"非正常"积分(列出适当的假

设，编成定理，再加以证明）．例如证明

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x.$$

证明这两个积分之中有一个绝对收敛，另一个则不然．

10．设 p 与 q 都是正实数，满足

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

证明下列各命题：

(a)假若 $u\geqslant 0$，且 $v\geqslant 0$，那么

$$uv\leqslant \frac{u^p}{p}+\frac{v^q}{q}$$

当且仅当 $u^p=v^q$ 时等号适用．

(b)假若 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$，$g\in\mathscr{R}(\alpha)$，$f\geqslant 0$，$g\geqslant 0$，而且

$$\int_a^b f^p\mathrm{d}\alpha = 1 = \int_a^b g^q\mathrm{d}\alpha,$$

那么

$$\int_a^b fg\,\mathrm{d}\alpha\leqslant 1.$$

(c)假若 f 与 g 是属于 $\mathscr{R}(\alpha)$的复值函数，那么

$$\left|\int_a^b fg\,\mathrm{d}\alpha\right|\leqslant\left\{\int_a^b |f|^p\mathrm{d}\alpha\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_a^b |g|^q\mathrm{d}\alpha\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

这是 Hölder 不等式．当 $p=q=2$ 时，寻常叫做 Schwarz 不等式(注意定理 1.35 是这不等式的极特别的情形)．

(d)证明 Hölder 不等式对于习题 7.8 所说的“非正常”积分也真确．

11．设 α 是$[a，b]$上固定的递增函数．对于 $u\in\mathscr{R}(\alpha)$定义

$$\|u\|_2=\left\{\int_a^b |u|^2\mathrm{d}\alpha\right\}^{1/2}.$$

假若 $f，g，h\in\mathscr{R}(\alpha)$，像定理 1.37 的证明里那样，作为 Schwarz 不等式的推论，证明三角形不等式

$$\|f-h\|_2\leqslant\|f-g\|_2+\|g-h\|_2.$$

12．沿用第 11 题的记号，假定 $f\in\mathscr{R}(\alpha)$，并且 $\varepsilon>0$．证明在$[a，b]$上存在着连续函数 g 满足 $\|f-g\|_2<\varepsilon$．

提示：设 $P=\{x_0，\cdots，x_n\}$是$[a，b]$的一个适当的分法，如果 $x_{i-1}<t<x_i$，

定义

$$g(t)=\frac{x_i-t}{\Delta x_i}f(x_{i-1})+\frac{t-x_{i-1}}{\Delta x_i}f(x_i)$$

13. 定义

$$f(x)=\int_x^{x+1}\sin(t^2)\mathrm{d}t$$

(a)求证 $x>0$ 时 $|f(x)|<\frac{1}{x}$

提示：置 $t^2=u$，再分部积分以证 $f(x)$等于

$$\frac{\cos(x^2)}{2x}-\frac{\cos[(x+1)^2]}{2(x+1)}-\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\cos u}{4u^{3/2}}\mathrm{d}u$$

用-1代替 $\cos u$.

(b)证明

$$2xf(x)=\cos(x^2)-\cos[(x+1)^2]+r(x),$$

其中 $|r(x)|<c/x$，而 c 是常数.

(c)求 $xf(x)$当 $x\to\infty$时的上、下极限.

(d) $\int_0^\infty \sin(t^2)\mathrm{d}t$ 收敛吗？

14. 同样地讨论

$$f(x)=\int_x^{x+1}\sin(e^t)\mathrm{d}t$$

求证

$$e^x|f(x)|<2$$

和

$$e^xf(x)=\cos(e^x)-e^{-1}\cos(e^{x+1})+r(x),$$

其中 $|r(x)|<Ce^{-x}$，C 是某个常数.

15. 假设 f 是$[a,b]$上的连续可微的实函数，$f(a)=f(b)=0$，并且

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=1$$

求证

$$\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}$$

和

$$\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x\cdot\int_a^b x^2f^2(x)\mathrm{d}x>\frac{1}{4}.$$

16. 对于 $1<s<\infty$，定义

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},$$

(这是 Riemann 的 ζ 函数，在研究质数的分布时极为重要).
求证

$$(a)\zeta(s)=s\int_1^{\infty}\frac{[x]}{x^{s+1}}\mathrm{d}x,$$

和

$$(b)\zeta(s)=\frac{s}{s-1}-s\int_1^{\infty}\frac{x-[x]}{x^{s+1}}\mathrm{d}x,$$

其中$[x]$表示不大于 x 的最大整数.

证明(b)里的积分对于一切 $s>0$ 收敛.

提示：为了证明(a)可以求$[1, N]$上的积分与定义 $\zeta(s)$的级数的第 N 个部分和之差.

17. 假定 α 在$[a, b]$上单调递增，g 连续，而且对于 $a\leqslant x\leqslant b$，$g(x)=G'(x)$. 求证

$$\int_a^b\alpha(x)g(x)\mathrm{d}x=G(b)\alpha(b)-G(a)\alpha(a)-\int_a^b G\mathrm{d}\alpha.$$

提示：取实的 g 无损于一般性. 给定 $P=\{x_0, x_1\cdots, x_n\}$，选 $t_i\in(x_{i-1}, x_i)$ 使 $g(t_i)\Delta x_i=G(x_i)-G(x_{i-1})$. 证明

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha(x_i)g(t_i)\Delta x_i=G(b)\alpha(b)-G(a)\alpha(a)-\sum_{i=1}^{n}G(x_{i-1})\Delta\alpha_i.$$

18. 设复平面里的曲线 γ_1，γ_2，γ_3，是由

$$\gamma_1(t)=e^{it},\gamma_2(t)=e^{2it},\gamma_3(t)=e^{2\pi i t\sin(1/t)}$$

定义在$[0, 2\pi]$之上的. 求证这三个曲线的值域相同，γ_1 与 γ_2 为可求长，γ_1 的长是 2π，γ_2 的长是 4π，而 γ_3 不可求长.

19. 设 γ_1 是定义在$[a, b]$上的 R^k 里的曲线；ϕ 是把$[c, d]$映满$[a, b]$的连续 1-1 映射，而$\phi(c)=a$；再定义 $\gamma_2(s)=\gamma_1(\phi(s))$. 求证 γ_2 是弧，是闭曲线或是可求长曲线当且仅当 γ_1 也是这样的. 证明 γ_2 与 γ_1 的长相同.